แนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและได้นำเสนอในหัวข้อต่อไปนี้

1. แนวคิดและทฤษฎี

   1.1 จุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass)

   1.2 การหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางด้วยคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส

   1.3 โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of Inertia)

   1.4 ทฤษฎีแกนตั้งฉาก (Orthogonal Axis Theorem)

   1.5 การหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางด้วยคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส

   1.6 สูตรสำเร็จตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล $\left(X_{CM}, Y_{CM}\right)$ และค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแผ่นบาง ($I_{Z_{CM}}$)

   1.7 ทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์ (Steiner's Parallel Axis Theorem)

   1.8 ลูกตุ้มฟิสิกัล (Physical Pendulum)

   1.9 แนวโน้มของคาบเวลาเมื่อเลื่อนตำแหน่งออกตามแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวล

   1.10 อะคริลิก

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

   2.1 งานวิจัยในประเทศ

   2.2 งานวิจัยต่างประเทศ

แนวคิดและทฤษฎี

จุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass)

ในระบบอนุภาคใด ๆ ตามจริงนั้นวัตถุมีขนาดไม่ได้เป็นจุด การออกแรงกระทำต่อวัตถุเพื่อให้วัตถุมีการเลื่อนตำแหน่งโดยไม่หมุน แรงที่กระทำต่อวัตถุจะต้องผ่านตำแหน่งหนึ่ง ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เปรียบเสมือนจุดรวมของมวลของวัตถุทั้งก้อน และเรียกตำแหน่งนั้น ๆ ว่าจุดศูนย์กลางมวล โดยที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลวัตถุแข็งเกร็งตำแหน่งจะเป็นจุดที่อยู่ประจำที่

ถ้าวัตถุที่เป็นจุดมวลสองจุดมีมวลไม่เท่ากัน อยู่แยกกันห่างจากกัน จุดศูนย์กลางมวลจะอยู่ใกล้มวลที่มากกว่า สำหรับมวล m_1 และ m_2 อยู่บนแกน X และอยู่ห่างจากตำแหน่งอ้างอิงที่จุดกำเนิด 0 เป็นระยะ r_1 และ r_2 ตามลำดับ ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล หาได้จากสมการ

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

$$\text{C.M.} = \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{---------- (1)}$$

เมื่อ C.M. คือ ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ

m_1 คือ มวลของวัตถุส่วนที่หนึ่ง มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

m_2 คือ มวลของวัตถุส่วนที่สอง มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

r_1 คือ ระยะที่มวล m_1 อยู่ห่างจากตำแหน่งอ้างอิง 0 มีหน่วยเป็นเมตร

r_2 คือ ระยะที่มวล m_2 อยู่ห่างจากตำแหน่งอ้างอิง 0 มีหน่วยเป็นเมตร

หากวัตถุแข็งเกร็งประกอบด้วยมวลชิ้นย่อย ๆ เรียงตัวต่อเนื่องกัน จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุถือเป็นตำแหน่งที่เสมือนกับว่ามวลชิ้นย่อย ๆ ของวัตถุมารวมกันที่จุดดังกล่าว การคำนวณหาจุดศูนย์มวลทางคณิตทำได้สองวิธี

กรณีวัตถุแข็งเกร็งแบบแผ่นบาง มวลไม่ต่อเนื่อง ใช้การคำนวณแบบพีชคณิตในการหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลดังนี้

$$\text{C.M.} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \text{---------- (2)}$$

เมื่อ C.M. คือ ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ

$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i$ คือ โมเมนต์รวมของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร

$\sum_{i=1}^{n} m_i$ คือ มวลรวมของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

กรณีวัตถุแบบแผ่นบางที่มีมวลต่อเนื่อง เราสามารถหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลด้วยคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส ได้ว่า

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

$$\text{C.M.} = \frac{\int r\,dm}{\int dm} = \frac{\int r\rho\,dA}{\int \rho\,dA} = \frac{\int r\,dA}{\int dA} \qquad \text{---------- (3)}$$

เมื่อ C.M. คือ ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ

$\int rdm$ คือ โมเมนต์รวมของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร

$\int dm$ คือ มวลรวมของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

ρ คือ ความหนาแน่นของแผ่นวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม/ตารางเมตร ซึ่งถ้าวัตถุมีความหนาแน่นสม่ำเสมอ สามารถตัดทิ้งได้

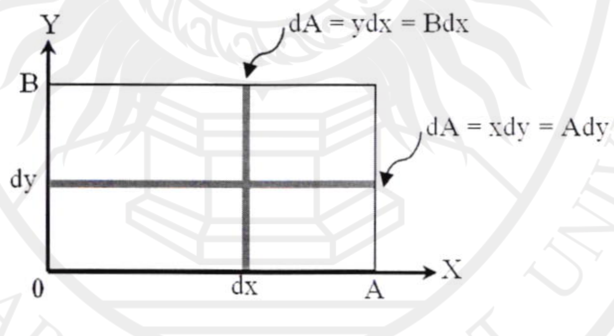
$\int dA$ คือ พื้นที่ย่อยขนาดเล็ก ๆ มีหน่วยเป็นตารางเมตร

หรืออาจกล่าวเป็นภาษาในทางสถิติว่า จุดศูนย์กลางมวลคือตำแหน่งเฉลี่ยของอนุภาคที่ถ่วงน้ำหนักด้วยมวล (ปิยพงษ์ สิทธิคง. 2547 : 246)

การหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางด้วยคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส

1. จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง

จุดศูนย์กลางมวล ของกรณีของแผ่นวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง กว้าง B ยาว A มวล M ดังภาพประกอบ 1 สามารถหาได้ดังนี้



ภาพประกอบ 1 การหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

$$X_{CM} = \frac{\int_0^A x \cdot B dx}{\int_0^A B dx}$$

$$= \frac{\int_0^A x dx}{\int_0^A dx}$$

$$= \frac{\left.\left(\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^A}{\left.(x)\right|_0^A}$$

$$= \frac{\left(\frac{A^2}{2}\right)}{A}$$

$$= \frac{A}{2} \qquad \text{---------- (4)}$$

$$Y_{CM} = \frac{\int_0^B y \cdot A dy}{\int_0^B A dy}$$

$$= \frac{\int_0^B y dy}{\int_0^B dy}$$

$$= \frac{\left.\left(\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^B}{\left.(y)\right|_0^B}$$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

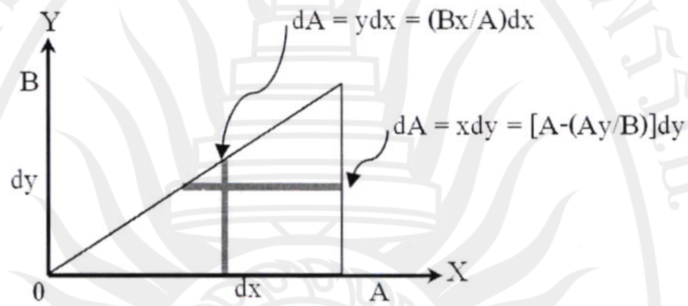
$$= \frac{\left(\frac{B^2}{2}\right)}{B}$$

$$= \frac{B}{2} \qquad \text{---------- (5)}$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง กว้าง B ยาว A มวล M คือ $\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$

2. จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง

จุดศูนย์กลางมวล ของกรณีของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง ฐานยาว A สูง B มวล M ดังภาพประกอบ 2 สามารถหาได้ดังนี้



ภาพประกอบ 2 การหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง

$$X_{CM} = \frac{\int_0^A x \cdot \left(\frac{B}{A}x\right)dx}{\int_0^A \left(\frac{B}{A}x\right)dx}$$

$$= \frac{\int_0^A x^2 dx}{\int_0^A x dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^A}{\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^A}$$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

$$= \frac{\left(\frac{A^3}{3}\right)}{\left(\frac{A^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{2A}{3} \qquad \text{---------- (6)}$$

$$Y_{CM} = \frac{\int_0^B y \cdot \left(A - \frac{Ay}{B}\right) dy}{\int_0^B \left(A - \frac{Ay}{B}\right) dy}$$

$$= \frac{\int_0^B \left(Ay - \frac{Ay^2}{B}\right) dy}{\int_0^B \left(A - \frac{Ay}{B}\right) dy}$$

$$= \frac{\left.\left(\frac{Ay^2}{2} - \frac{Ay^3}{3B}\right)\right|_0^B}{\left.\left(Ay - \frac{Ay^2}{2B}\right)\right|_0^B}$$

$$= \frac{\left(\frac{AB^2}{2} - \frac{AB^3}{3}\right)}{\left(AB - \frac{AB}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{AB^2}{6}\right)}{\left(\frac{AB}{2}\right)}$$

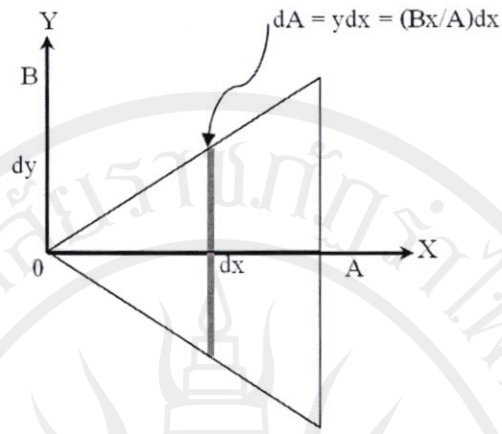
$$= \frac{B}{3} \qquad \text{---------- (7)}$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง ฐาน A สูง B มวล M คือ $\left(\frac{2A}{3}, \frac{B}{3}\right)$ (สมชาย เกียรติกมลชัย. 2553 : 41)

3. จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง

จุดศูนย์กลางมวล ของกรณีของแผ่นวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง สูง A ฐานยาว 2B มวล M วางตัวดังภาพประกอบ 3 สามารถหาได้ดังนี้

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี



ภาพประกอบ 3 การหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง

$$X_{CM} = \frac{\int_0^A x \cdot \left(\frac{2B}{A}x\right)dx}{\int_0^A \left(\frac{2B}{A}x\right)dx}$$

$$= \frac{\int_0^A x^2 dx}{\int_0^A x dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^A}{\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^A}$$

$$= \frac{\left(\frac{A^3}{3}\right)}{\left(\frac{A^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{2A}{3} \qquad \text{----------} \ (8)$$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

นั่นคือ จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง สูง A ฐาน 2B มวล M คือ $\left(\frac{2A}{3}, 0\right)$

โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of Inertia)

โมเมนต์ความเฉื่อย เป็นสมบัติอย่างหนึ่งเกิดขึ้นเมื่อวัตถุหมุน เป็นปริมาณที่บอกความเฉื่อยในการหมุน (Rotational Inertia) ของวัตถุ ในการที่จะพยายามรักษาสภาพเดิมของการหมุนเอาไว้ โดยวัตถุมีโมเมนต์ความเฉื่อยมาก ก็จะทำให้วัตถุนั้นเปลี่ยนสภาพของการหมุนเดิมได้ยาก และถ้าวัตถุนั้นมีโมเมนต์ความเฉื่อยน้อยก็จะทำให้วัตถุนั้นเปลี่ยนสภาพของการหมุนเดิมได้ง่าย ซึ่งโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุมีค่าขึ้นกับแกนหมุน รูปร่างของวัตถุและลักษณะการเรียงตัวของวัตถุรอบแกนหมุน การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยแยกการพิจารณาได้เป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่หนึ่ง : วัตถุที่ประกอบด้วยมวลก้อนเล็ก ๆ โมเมนต์ความเฉื่อยคำนวณได้จากสมการ

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \qquad \text{----------} \ (9)$$

เมื่อ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

m_i คือ มวลชิ้นที่ i ที่กระจายอยู่ในเนื้อวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

r_i คือ ระยะตั้งฉากจากมวลไปยังแกนหมุน มีหน่วยเป็นเมตร

กรณีที่สอง : วัตถุที่เป็นรูปทรงเรขาคณิต หรือวัตถุที่มีมวลกระจายต่อเนื่องกันเสมือนเป็นเนื้อเดียวกัน คำนวณหาค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุ ได้ดังนี้

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dA \qquad \text{----------} \ (10)$$

เมื่อ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

r คือ ระยะตั้งฉากจากมวลไปยังแกนหมุน มีหน่วยเป็นเมตร

dm คือ มวลส่วนย่อย ๆ ที่พิจารณา มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

ρ คือ ความหนาแน่นเชิงพื้นที่ของแผ่นวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัมต่อตารางเมตร

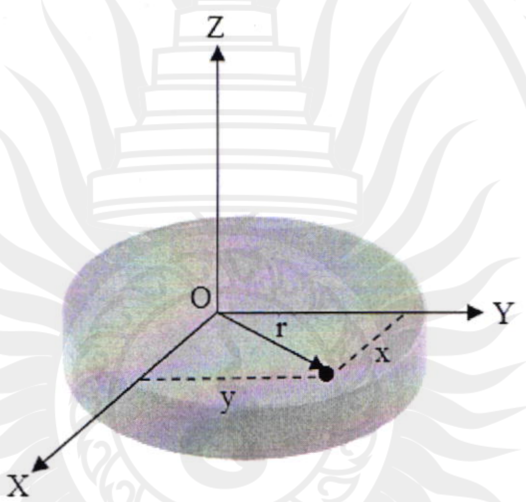
dA คือ พื้นที่ย่อยขนาดเล็ก ๆ มีหน่วยเป็นตารางเมตร

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

โมเมนต์ความเฉื่อยเป็นปริมาณสเกลาร์ โดยโมเมนต์ความเฉื่อยจะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นกับมวล และระยะจากมวลไปยังแกนหมุน ถ้าแกนหมุนเปลี่ยนไปจะมีผลทำให้ลักษณะการหมุนและค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุเปลี่ยนไปด้วย

ทฤษฎีแกนตั้งฉาก (Orthogonal Axis Theorem)

หากกำหนดให้ I_X , I_Y และ I_Z คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน X, Y และ Z ตามลำดับ ดังภาพประกอบ 4



ภาพประกอบ 4 ทฤษฎีแกนตั้งฉาก
ที่มา : ภาควิชาฟิสิกส์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2543 : 135

จะพบว่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบของวัตถุมีค่าเท่ากับผลบวกของโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุในสองแนวแกนที่ตั้งฉากกันและขนานกับระนาบของแผ่นวัตถุ

เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$I_Z = I_X + I_Y \qquad \text{---------- (11)}$$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

เมื่อ I_Z คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลที่ตั้งฉากกับระนาบของแผ่นวัตถุ

I_X, I_Y คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ขนานกับระนาบในทิศ X และ Y ตามลำดับ โดยแกน X และ Y ตั้งฉากต่อกันในแนวระนาบของวัตถุ

การพิสูจน์ทฤษฎีแกนตั้งฉาก โดยอาศัยทฤษฎีบทของปีทากอรัส

จากทฤษฎีบทของปีทากอรัสและภาพประกอบ 1 พบว่า

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{---------- (12)}$$

เมื่อ r คือ ระยะจากแกน Z ไปถึงอนุภาคใด ๆ มีหน่วยเป็นเมตร
x คือ ระยะจากแกน Y ไปถึงอนุภาคใด ๆ มีหน่วยเป็นเมตร
y คือ ระยะจากแกน X ไปถึงอนุภาคใด ๆ มีหน่วยเป็นเมตร

จากนิยามของโมเมนต์ความเฉื่อย จึงสามารถเขียนได้ว่า

$$I_Z = \int r^2 dm$$

$$= \int \left(x^2 + y^2\right) dm$$

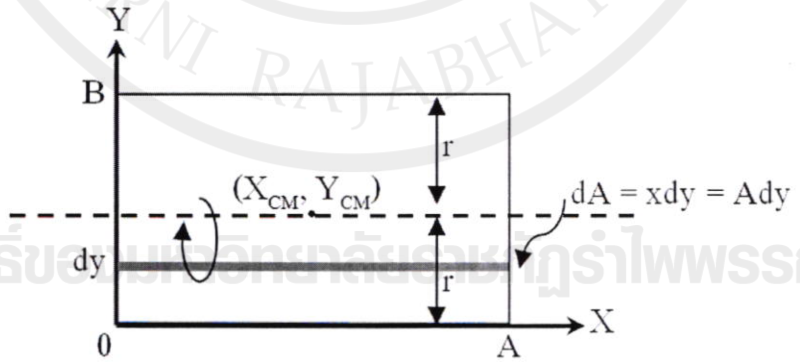
$$= \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

$$= I_X + I_Y$$

การหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางด้วยคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส

1. โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบางมวล M กว้าง B ยาว A รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน X ดังภาพประกอบ 5 สามารถหาได้ดังนี้



ภาพประกอบ 5 โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบางรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน X

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

$$I_{X_{CM}} = \int y^2 \rho dA$$

$$= \int y^2 \left(\frac{M}{AB}\right) x dy$$

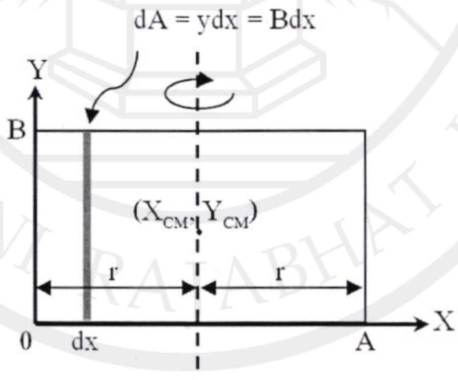
$$= \left(\frac{M}{AB}\right) A \int_{-B/2}^{B/2} y^2 dy$$

$$= \left(\frac{M}{AB}\right) A \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-B/2}^{B/2}$$

$$= \left(\frac{M}{AB}\right) A \left(\frac{B^3}{24} - \left(-\frac{B^3}{24}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{12} MB^2 \qquad \text{---------- (13)}$$

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง กว้าง B ยาว A รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน Y ดังภาพประกอบที่ 6 สามารถหาได้ดังนี้



ภาพประกอบ 6 โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นบาง รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน Y

$$I_{Y_{CM}} = \int x^2 \rho dA$$

$$= \int x^2 \left(\frac{M}{AB}\right) y dx$$

$$= \left(\frac{M}{AB}\right) B \int_{-A/2}^{A/2} x^2 dx$$

$$= \left(\frac{M}{AB}\right) B \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-A/2}^{A/2}$$

$$= \left(\frac{M}{AB}\right) B \left(\frac{A^3}{24} - \left(-\frac{A^3}{24}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{12} MA^2 \qquad \text{----------} \ (14)$$

และจากสมการที่ (11)

$$I_{Z_{CM}} = I_{X_{CM}} + I_{Y_{CM}}$$

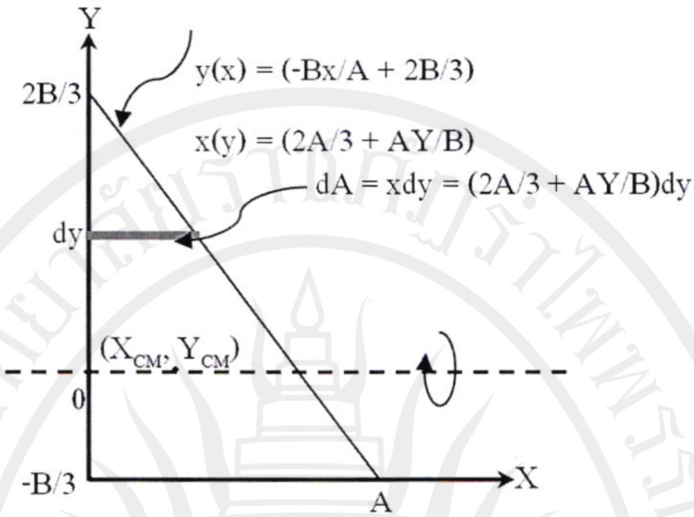
$$= \frac{1}{12} MB^2 + \frac{1}{12} MA^2$$

$$= \frac{1}{12} M\left(A^2 + B^2\right) \qquad \text{----------} \ (15)$$

2. โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง ฐาน A สูง B รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน X ดังภาพประกอบ 7 สามารถหาได้ดังนี้

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี



ภาพประกอบ 7 โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน X

$$I_{X_{CM}} = \int y^2 \rho dA$$

$$= \rho \int_{-B/3}^{2B/3} y^2 \left(\frac{2A}{3} - \frac{Ay}{B} \right) dy$$

$$= \rho \left(\frac{2Ay^3}{9} - \frac{Ay^4}{4B} \right) \Bigg|_{-B/3}^{2B/3}$$

$$= \left(\frac{2M}{AB} \right) \left(\frac{2Ay^3}{9} - \frac{Ay^4}{4B} \right) \Bigg|_{-B/3}^{2B/3}$$

$$= \frac{1}{18} MB^2 \qquad \text{---------- (16)}$$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

ในทำนองเดียวกัน โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง ฐาน A สูง B รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลขนานกับแนวแกน Y ได้ดังนี้

$$I_{Y_{CM}} = \frac{1}{18} MA^2 \qquad \text{---------- (17)}$$

และจากสมการที่ (11)

$$I_{Z_{CM}} = I_{X_{CM}} + I_{Y_{CM}}$$

$$= \frac{1}{18}MB^2 + \frac{1}{18}MA^2$$

$$= \frac{1}{18}M\left(A^2 + B^2\right) \qquad \text{----------} \ (18)$$

3. โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง

กรณีของวัตถุรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบแผ่นบาง การหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล สามารถหาได้เช่นเดียวกับโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแบบแผ่นบาง

สูตรสำเร็จตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล (X_{CM}, Y_{CM}) และค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง ($I_{Z_{CM}}$)

ในงานวิจัยนี้ จะศึกษาการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล (Iz_{cm}) ของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางจำนวน 3 รูปแบบ ได้แก่ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งจากการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ วัตถุรูปเรขาคณิตทั้งสามมีตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล และค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ดังแสดงในตาราง 1

ตาราง 1 ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล และค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล ของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง

รูปของแผ่นบาง	จุดศูนย์กลางมวล (C.M.)	โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล (Iz_{cm})
สี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง B ยาว A มวล M	$\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$	$\frac{1}{12}M\left(A^2 + B^2\right)$
สามเหลี่ยมมุมฉาก ฐานยาว A สูง B มวล M	$\left(\frac{2A}{3}, \frac{B}{3}\right)$	$\frac{1}{18}M\left(A^2 + B^2\right)$
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ฐานยาว 2B สูง A มวล M	$\left(\frac{2A}{3}, 0\right)$	$\frac{1}{18}M\left(A^2 + B^2\right)$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

ทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์ (Steiner's Parallel Axis Theorem)

ถ้าวัตถุมวล M มีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลเป็น I_{CM} จะได้ว่า โมเมนต์ความเฉื่อย I ของวัตถุนี้รอบแกนใด ๆ ซึ่งขนานกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลและอยู่ห่างกันเป็นระยะ d มีค่าเป็น

$$I = I_{CM} + Md^2 \qquad \text{---------- (19)}$$

เมื่อ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

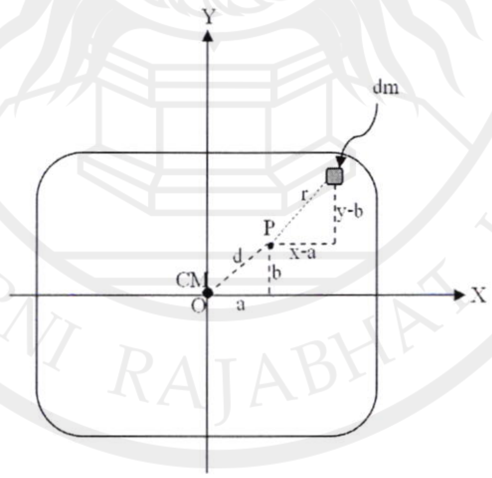
I_{CM} คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลมีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

M คือ มวลของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

d คือ ระยะห่างในแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวลมีหน่วยเป็นเมตร

สมการ (19) ถูกเรียกว่า ทฤษฎีแกนขนาน (Parallel Axis Theorem) ค้นพบโดยจาคอป สไตน์เนอร์ (Jakob Steiner) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์

การพิสูจน์ทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์



ภาพประกอบ 8 ทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์

ที่มา : ธีระพันธ์ สันติเทวกุล. 2547 : 342

จากภาพประกอบ 8 ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุใด ๆ โดยตั้งแกน X, Y, Z ให้อยู่ที่จุดกำเนิด O ดังรูป โดยแกน Z พุ่งออกจากหน้ากระดาษ

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

เมื่อ I_{CM} คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล (แกน Z)

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ขนานกับแกน Z ผ่านจุด P

โดยระยะตามแนวแกน X และ Y ของจุด P มีค่า a และ b ตามลำดับ

โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุก้อนนี้รอบแกนซึ่งผ่านจุด P หาได้จาก

$$I = \int r^2 dm$$

$$= \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 \right] dm$$

โดยการอินทิเกรต เป็นการอินทิเกรตทั้งก้อนวัตถุ กระจายพจน์และจัดรูปจะได้ว่า

$$I = \int \left(x^2 + y^2\right) dm - 2a\int x dm - 2b\int y dm + \int \left(a^2 + b^2\right) dm$$

จากนิยามของจุดศูนย์กลางมวล

$$X_{CM} = \frac{\int x dm}{M}$$

แต่เนื่องจากตั้งแกนให้จุดกำเนิดทับกับจุดศูนย์กลางมวล แสดงว่า $X_{CM} = 0$ ทำให้ได้ว่า $\int x dm = 0$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\int y dm = 0$ ดังนั้น เราเขียนสมการใหม่ได้ คือ

$$I = \int \left(x^2 + y^2\right) dm + \int \left(a^2 + b^2\right) dm$$

$$= I_{CM} + M\left(a^2 + b^2\right)$$

$$= I_{CM} + Md^2$$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

ลูกตุ้มฟิสิกัล (Physical Pendulum)

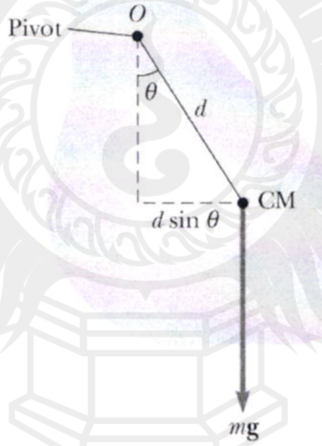
ลูกตุ้มฟิสิกัล ประกอบด้วยวัตถุแข็งเกร็งที่มีขนาด และแกว่งรอบแกนราบอันหนึ่ง จากภาพประกอบ 9 จุดศูนย์กลางมวลอยู่ห่างจากจุดหมุนเป็นระยะ $d\sin\theta$ และทำมุม θ กับแนวดิ่ง ทอร์กที่กระทำกับวัตถุในทิศที่ทำให้วัตถุกลับสู่ตำแหน่งสมดุล คือ

$$\tau = -mgd\sin\theta \qquad \text{---------- (20)}$$

เมื่อ τ คือ ทอร์กที่ดึงวัตถุกลับสู่ตำแหน่งสมดุลมีหน่วยเป็นนิวตัน·เมตร

mg คือ น้ำหนักของวัตถุมีหน่วยเป็นนิวตัน

$d\sin\theta$ คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางมวลถึงจุดหมุนในแนวตั้งฉากมีหน่วยเป็นเมตร



ภาพประกอบ 9 ลูกตุ้มฟิสิกัล

ที่มา : Serway and Jewett. 2004 : 469

และจากนิยามของทอร์ก

$$\tau = I\alpha$$

$$= I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \text{---------- (21)}$$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

เมื่อ τ คือ ทอร์กที่ดึงวัตถุกลับสู่ตำแหน่งสมดุลมีหน่วยเป็นนิวตัน·เมตร

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุมีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

α คือ ความเร่งเชิงมุมของวัตถุมีเรเดียน/วินาที^{2}

θ คือ มุมที่เบนไปจากแนวสมดุลมีหน่วยเป็นเรเดียน

จากสมการ (20) และ (21) จะได้

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta \quad \text{---------- (22)}$$

จัดรูปสมการใหม่ได้ว่า

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd\sin\theta}{I} = 0 \quad \text{---------- (23)}$$

จากเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ เมื่อ θ เป็นมุมเล็ก ๆ จะได้ว่า $\sin\theta \approx \theta$ จะได้สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายคือ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0 \quad \text{---------- (24)}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับรูปทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \text{---------- (25)}$$

จะพบว่า

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I} \quad \text{---------- (26)}$$

จากนิยามของความถี่เชิงมุม

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad \text{---------- (27)}$$

นั่นคือ

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

และได้ว่า

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad \text{---------- (28)}$$

เมื่อ T คือ คาบการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มฟิสิกัล มีหน่วยเป็นวินาที

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

m คือ มวลของวัตถุแข็งเกร็ง มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก มีหน่วยเป็นเมตร/วินาที^{2}

d คือ ระยะที่วัดจากจุดศูนย์กลางมวล มีหน่วยเป็นเมตร

ซึ่งในการทดลองนี้จะแกว่งวัตถุ โดยมีจุดแขวนอยู่ห่างจากตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลเป็นระยะ d เพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบของแผ่นบาง และนำไปคำนวณย้อนกลับ ด้วยทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์ เพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นบาง ($I_{Z_{CM}}$) โดยปรับรูปสมการให้เป็น

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}} + md^2}{mgd}} \qquad \text{---------- (29)}$$

เมื่อ $I_{Z_{CM}}$ คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล มีหน่วยเป็นกิโลกรัม·เมตร^2

เมื่อจัดรูปสมการ จะหาค่า $I_{Z_{CM}}$ ได้คือ

$$I_{Z_{CM}} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2 \qquad \text{----------} \ (30)$$

แนวโน้มของคาบเวลาเมื่อเลื่อนตำแหน่งออกตามแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวล

จากสมการ (30)

$$I_{Z_{CM}} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปสมการกำลังสอง $Ax^2 + Bx + C = 0$ จะได้

$$md^2 - \frac{mgdT^2}{4\pi^2} + I_{Z_{CM}} = 0 \qquad \text{----------} \ (31)$$

จะพบว่าสมการอยู่ในรูปสมการพหุนามกำลังสอง ที่ให้รูปกราฟเป็นพาราโบลาหงาย ซึ่งต้องมีค่าระยะแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวล d ที่ทำให้คาบเวลาในการแกว่ง T มีค่าน้อยที่สุดเกิดขึ้น (จุดต่ำสุดของโค้งที่ยอดพาราโบลา) ซึ่งหาค่าระยะ d ได้ โดยการหาอนุพันธ์ของ T เทียบกับ d และหาจุดวิกฤตของระยะ d โดยการให้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งมีค่าเป็นศูนย์

$$\frac{d}{dd}(T) = \frac{d}{dd}\left(2\pi\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}} + md^2}{mgd}}\right) = 0 \qquad \text{----------} \ (32)$$

นั่นคือ

$$2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{I_{Z_{CM}} + md^2}{mgd}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{mgd(2md) - \left(I_{Z_{CM}} + md^2\right)(mg)}{(mgd)^2}\right) = 0$$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

จัดรูปสมการให้ง่ายขึ้น

$$\frac{\pi\left(\dfrac{mgd\left(2md\right)-\left(I_{Z_{CM}}+md^2\right)\left(mg\right)}{\left(mgd\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{I_{Z_{CM}}+md^2}{mgd}\right)}} = 0$$

กระจายพจน์ต่าง ๆ จะได้

$$\frac{mg\pi\left(md^2-I_{Z_{CM}}\right)}{\left(mgd\right)^2\sqrt{\left(\dfrac{I_{Z_{CM}}+md^2}{mgd}\right)}} = 0$$

จะพบว่า

$$md^2 - I_{Z_{CM}} = 0 \qquad \text{----------} \ (33)$$

นั่นคือ

$$d_T = \pm\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}}}{m}} \qquad \text{----------} \ (34)$$

จากทฤษฎีบทแกนขนานของสไตน์เนอร์

$$I = I_{CM} + md^2$$

แทนค่า $d = \pm\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}}}{m}}$ จากสมการ (34) ลงในสมการ (19) จะพบว่า

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

$$I_Z = I_{Z_{CM}} + m\left(\pm\sqrt{\frac{I_{Z_{CM}}}{m}}\right)^2 = 2I_{Z_{CM}} \qquad \text{----------} \ (35)$$

นั่นคือ ตำแหน่ง d ใด ใดที่ให้ค่า $I_Z = 2I_{Z_{CM}}$ จะเป็นตำแหน่งที่ทำให้เกิดคาบน้อยที่สุด

ในกรณีของสี่เหลี่ยมผืนผ้า $I_{Z_{CM}} = \frac{1}{12}m\left(A^2+B^2\right)$

ระยะ d ที่ทำให้ T น้อยที่สุดจึงเป็น

$$d_T = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}m\left(A^2+B^2\right)}{m}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\left(A^2+B^2\right)} \qquad \text{----------} \ (36)$$

ในกรณีของสามเหลี่ยมมุมฉากและสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $I_{Z_{CM}} = \frac{1}{18}m\left(A^2+B^2\right)$ ระยะ d ที่ทำให้ T น้อยที่สุดจึงเป็น

$$d_T = \sqrt{\frac{\frac{1}{18}m\left(A^2+B^2\right)}{m}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{\left(A^2+B^2\right)} \qquad \text{----------} \ (37)$$

อะคริลิก

อะคริลิกพลาสติกหรือโพลิเมทิลเมทาไครเลต หรือ PPMA เป็นเทอร์โมพลาสติกชนิดหนึ่ง มีชื่อทางการค้าหลายชื่อด้วยกัน เช่น Plexiglas, Lucite, Perspex เป็นต้น และสูตรเคมีของพลาสติกชนิดนี้คือ $C_5H_8O_2$ พลาสติกชนิดนี้ถูกนำมาประยุกต์ใช้ในงานหลายอย่าง เช่น กระจกหน้าต่างบนเครื่องบิน ป้ายโฆษณา กระจกตู้ปลา วัสดุทางการแพทย์ เป็นต้น เนื่องจากวัสดุมีสมบัติโดดเด่นในเรื่องความเหนียว (Toughness) สามารถขึ้นรูปได้ง่าย นอกจากนั้นยังมีค่าความหนาแน่นต่ำ ซึ่งเป็นสมบัติประจำตัวของวัสดุประเภทพลาสติกแล้ว อะคริลิกพลาสติกจึงเป็นวัสดุชนิดหนึ่งที่นิยมนำมาใช้แทนแก้วในงานหลายอย่าง มีความหนาแน่นประมาณ 1.15 - 1.19 กรัม/ลูกบาศก์เซนติเมตร โดยมีจุดหลอมเหลวที่อุณหภูมิ 130 - 140 องศาเซลเซียส และจุดเดือดที่อุณหภูมิ 200 องศาเซลเซียสขึ้นไป มีความทนทานต่อการกระแทก (Impact Strength) สูงกว่าแก้ว แต่ต่ำกว่าโพลิคาร์บอเนต

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

และพลาสติกวิศวกรรมชนิดอื่น มีเนื้ออ่อนจึงเกิดรอยขูดขีดได้ง่าย มีความทนทานต่อสภาพแวดล้อมดีกว่าพลาสติกชนิดอื่นเช่น โพลิคาร์บอเนต จึงนิยมใช้อะคริลิกพลาสติกกับงานกลางแจ้ง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยในประเทศ

จรัส บุญยธรรมมา (ออนไลน์. 2545) ได้ทำการทดลองหาโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลที่มีลักษณะไม่ต่อเนื่อง โดยการหมุนมวลบนจานหมุน และทำการทดลองหาความเร่งของระบบ เมื่อได้ค่าความเร่งแล้ว จึงนำไปหาโมเมนต์ความเฉื่อยได้จากสูตร

$$I_{CM} = \frac{m(g-a)R^2}{a}$$

และกล่าวถึงความแตกต่างระหว่างการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลที่มีลักษณะไม่ต่อเนื่อง และการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลที่มีลักษณะต่อเนื่องไว้ว่า

"$I = \sum m_i r_i^2$ เป็นสมการที่หาโมเมนต์ความเฉื่อยในกรณีที่มวลเป็นจุด แต่ถ้ามวลมีรูปทรงขนาดใหญ่ และเนื้อวัตถุกระจายอย่างสม่ำเสมอ จะต้องใช้วิธีการอินทิกรัลแทน โดยแบ่งมวลของวัตถุออกเป็นชิ้นเล็ก ๆ มีค่า dm อยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ r โมเมนต์ความเฉื่อยของอนุภาคเล็ก ๆ นี้จะเป็น $I = \int r^2 dm$ และถ้า ρ เป็นความหนาแน่นของวัตถุ และ dV เป็นปริมาตรเล็ก ๆ $dm = \rho dV$ เมื่อแทนค่าในสมการ จะได้ว่า $I = \int r^2 \rho dV$"

งานวิจัยต่างประเทศ

Peter E. Banks (1994 : 389) ได้ทำการหาโมเมนต์ความเฉื่อยจากท่อ PVC โดยการนำท่อมาต่อกันเป็นรูปตัวที แล้วติดกับรอกจากนั้นใช้มวลถ่วงเพื่อหาอัตราเร็ว แล้วนำมาเขียนกราฟระหว่างอัตราเร็วกับเวลา ได้ค่าความชันคืออัตราเร่งของวัตถุ จากนั้นนำไปหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเปรียบเทียบกับค่าคำนวณทางทฤษฎี

Charles J. Burstone (1998 : 426 - 431) ได้ทำการทดลองหาโมเมนต์ความเฉื่อยเปรียบเทียบกับการคำนวณทางทฤษฎีโดยใช้ไม้วางตั้งกับพื้นแล้วแกว่งให้โยกแบบตุ๊กตาล้มลุก ซึ่งใช้นาฬิกาจับเวลาในการโยกครบรอบและนำไปเปรียบเทียบกับการคำนวณ โมเมนต์ความเฉื่อยซึ่งใช้ทฤษฎีแกนขนาน ทำให้ได้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางที่ใกล้เคียงกับค่าทางทฤษฎี

Russeva, Tsutsumanova and Russev (2010 : 59 - 62) ได้ทำการทดลองตรวจสอบทฤษฎีแกนขนานของ สไตน์เนอร์ ได้ศึกษาทดลอง ตรวจสอบทฤษฎีแกนขนานของสไตน์เนอร์ โดยใช้วัตถุแผ่นบางรูปปลาวาฬเป็นลูกตุ้มฟิสิกัล หาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลด้วยวิธีสุ่มหาและวางวัตถุลงบน

ปลายเข็ม จากนั้นทำการเจาะรูรอบวัตถุแผ่นบางรูปปลาวาฬ จำนวน 7 รู ที่มีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลไม่เท่ากัน และปล่อยให้ลูกตุ้มฟิสิกัลรูปปลาวาฬนี้ผลการวิจัยพบว่า นำค่าคาบการแกว่ง มาเขียนกราฟระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวล ซึ่งให้กราฟเป็นพาราโบลาหงาย และเขียนกราฟอีกรูปหนึ่งคือ ค่าคาบการแกว่งกำลังสองคูณระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลกับระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวลยกกำลังสอง ($T^2 \cdot d$ กับ d^2) ซึ่งได้กราฟเป็นเส้นตรงมีความชันเป็นบวก โดยได้วิเคราะห์กราฟเพื่อหาค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ซึ่งพบว่ามีค่า 9.8 ± 0.5 เมตร·วินาที$^{-2}$ และอัตราส่วนระหว่าง $I_{Z_{CM}}/m$ คือ 0.014 ± 0.0005 เมตร^2 และขณะที่มวล 26 กรัม จะได้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยที่ $(0.27 \pm 0.01) \times 10^{-3}$ กิโลกรัม·เมตร$^{-2}$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี